

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO LANÇAMENTO DE UM FOGUETE PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO

Marlon Sproesser Mathias, marlonsmathias@gmail.com  
Marcos Vinícius Fernandes Ribeiro, ribeiro.mvf@gmail.com  
Paulo Celso Greco Júnior, pgreco@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Avenida João Dagnone, 1100 - CEP 13563-120 - São Carlos, SP

**Resumo:** Este trabalho consiste no desenvolvimento de um método para analisar a estabilidade e o desempenho de um foguete de aletas fixas durante toda sua trajetória de subida. A estabilidade de um foguete é crítica para um lançamento, pois um veículo instável pode tomar qualquer trajetória, enquanto um veículo super-estável perde a capacidade de retornar à rota original, por isso obter uma configuração que o mantenha estável, sem comprometer sua performance, é crítico para o projeto de um veículo aeroespacial. Foram escolhidas as variáveis relevantes e usado um método de discretização temporal que as calcula, usando como base os instantes anteriores e coeficientes pré-determinados. Para reduzir o número de intervalos a serem calculados e, conseqüentemente, o custo computacional da simulação, foi usado o método de solução de equações diferenciais de Adams-Bashforth de terceira ordem. Pode-se observar a trajetória seguida pelo foguete e a variação da margem estática, considerando a incidência de ventos e a variação do centro de massa e do centro aerodinâmico, para assegurar sua estabilidade. Observou-se que mesmo sendo estaticamente estável, o foguete pode se tornar dinamicamente instável em certas configurações, o que evidencia a importância do estudo de toda a trajetória de subida.

**Palavras-chave:** Simulação numérica, foguete, estabilidade estática, estabilidade dinâmica, Adams-Bashforth

### 1. INTRODUÇÃO

A previsão da trajetória de subida de um foguete é essencial para sua operação, tanto do ponto de vista de segurança quanto para o cumprimento da missão. Apesar de depender de princípios básicos da mecânica, que podem ser facilmente expressos em equações diferenciais, a natureza em constante mudança de um foguete torna as soluções dessas equações praticamente impossíveis de serem obtidas de forma exata.

A estabilidade de um foguete depende de dois pontos principais, seu centro aerodinâmico e seu centro de massa. Para o veículo se tornar estável, o centro de massa deve estar acima do centro aerodinâmico. Como regra geral, a distância entre eles, conhecida como margem estática deve ser entre uma e duas vezes o diâmetro do foguete. Se for menor, o foguete está pouco estável, se for maior, ele está muito suscetível a sair de sua rota devido ao vento enquanto o motor estiver em funcionamento. (Nakka, 2011)

Com a rápida evolução dos computadores, a solução via métodos numéricos se tornou um meio prático e viável de se aproximar a solução de equações cujas soluções exatas não são conhecidas.

Tais métodos funcionam com a discretização temporal do problema, partindo de um instante inicial e calculando os seguintes com base em dados já conhecidos. O método mais simples é o de Euler, mas este só oferece uma precisão aceitável se o problema for dividido em intervalos de tempo muito reduzidos, criando a necessidade de muitos intervalos para cobrir todo o tempo desejado. Os métodos de passo múltiplo, como o de Adams-Bashforth, oferecem maior precisão sem a necessidade de intervalos tão reduzidos, o que reduz o número de intervalos a serem calculados e, por fim, aceleram a obtenção da solução. (Butcher, 2003)

Este trabalho tem como objetivo aplicar os métodos numéricos conhecidos na previsão de performance de um foguete. Com o objetivo de saber se ele é suficientemente estável para uma operação segura e se terá o desempenho desejado. O programa desenvolvido também auxilia em novos projetos por permitir uma rápida estimativa de performance dadas as características do novo veículo.

### 2. METODOLOGIA

O programa final consiste em uma série de planilhas eletrônicas desenvolvidas com o Microsoft Excel 2010 e programas escritos em Visual Basic for Applications.

A planilha principal contém uma tabela para entrada de dados do foguete e as condições do lançamento a cada instante. Uma segunda planilha é usada para visualizar os dados de saída, como a trajetória que será seguida e a altura

em função do tempo. Outras planilhas armazenam tabelas com coeficientes aerodinâmicos pré-calculados, definidos em função do número de Mach do escoamento em torno do foguete, são necessários o coeficiente de arrasto, a derivada do coeficiente de sustentação com relação ao ângulo de ataque do foguete e a posição do centro aerodinâmico.

Também é calculada qual inclinação deve ser dada à rampa de lançamento para contrabalançar os efeitos do vento e uma tabela com os dados da inclinação necessária para diferentes velocidades do vento é criada. Além disso, é medida a força máxima que age sobre as aletas para dimensionar sua fixação ao corpo do foguete.

## 2.1. Variáveis Consideradas na Simulação

### 2.1.1. Massa, Momento de Inércia e Centro de Massa

Devido à grande quantidade de combustível em um foguete com relação à sua massa, características como massa total do conjunto, posição do centro de gravidade e momento de inércia se alteram de maneira bastante significativa durante o lançamento, sendo necessário seu cálculo para cada instante considerado.

As características do foguete sem combustível são previstas a partir de seu projeto em um programa de CAD e podem ser verificadas uma vez que o protótipo for construído. Essas características são dadas na tabela de entrada.

A massa do propelente, sua posição dentro do foguete e o tamanho da câmara de combustão também são dados como entrada. A partir desses dados, assumindo uma queima uniforme dos grãos, é possível calcular a massa e o momento de inércia do combustível em qualquer estágio do funcionamento do motor. O momento de inércia é dado por (Halliday *et al.*, 1991):

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \quad (1)$$

Com essas informações é possível calcular a massa, o momento de inércia e a posição do centro de massa de todo o veículo ao longo da queima de combustível. A massa total é a simples soma das massas do foguete e do combustível. O centro de massa é calculado com uma média ponderada dos centros de massa do veículo e do combustível, usando suas respectivas massas como peso. O momento de inércia é obtido pelo teorema dos eixos paralelos, que soma aos momentos de inércia individuais suas massas multiplicadas pela distância de cada corpo ao centro de massa do conjunto, elevada ao quadrado:

$$I = \sum_i I_i + M_i D_i^2 \quad (2)$$

### 2.1.2. Condições Atmosféricas

Para se obter as forças aerodinâmicas a partir de coeficientes é necessário conhecer a densidade do ar onde o foguete se encontra. Por se tratar de um veículo que opera em uma grande faixa de altitudes, variações na densidade do ar podem se tornar significativas, em especial para grandes veículos que atingem as camadas superiores da atmosfera. Para isso foi usada a *U.S. Standard Atmosphere* (NASA, 1976). Dados para altitudes intermediárias entre duas entradas na tabela são obtidos por meio de uma interpolação linear.

Também é considerado o vento que, para simplificar o modelo, foi considerado constante.

### 2.1.3. Empuxo e Consumo de Combustível

O empuxo é considerado constante ao longo do funcionamento do motor, assim como a taxa de consumo de combustível. Dado o tempo de funcionamento do motor e a quantidade de propelente, é calculada a taxa de queima. Essa taxa é subtraída da massa total de combustível até que a queima se complete e o empuxo termine.

### 2.1.4. Coeficientes Aerodinâmicos

Os coeficientes aerodinâmicos necessários são o de arrasto e o de sustentação. Também é preciso saber onde é localizado o centro aerodinâmico do foguete, isto é, o ponto onde, se as resultantes aerodinâmicas fossem aplicadas, o momento resultante é nulo.

Tais valores variam com o número de Mach do foguete, principalmente em regime transônico.

Esses valores podem ser obtidos de diversas maneiras, tanto computacionais como experimentais. Foi usado o programa Aerolab, desenvolvido pelo Dansk Amatør Raket Klub.

Para valores intermediários entre duas entradas na tabela, é usada uma interpolação linear.

## 2.2. Evolução Temporal do Modelo

O modelo é calculado em duas dimensões, com três graus de liberdade. O eixo  $x$ , horizontal, na direção em que o vento atua e o eixo  $z$ , vertical. É permitida rotação em torno do eixo  $y$ .

### 2.2.1. Forças Atuantes

Na direção longitudinal atuam o empuxo do motor, o arrasto e uma componente do peso do veículo. O empuxo e a massa são dados de entrada, o arrasto é calculado a partir do coeficiente de arrasto, da densidade do ar, da área da seção transversal do foguete e da velocidade do escoamento ao seu redor, da forma:

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A \quad (3)$$

Na direção transversal atuam uma componente do peso e a sustentação gerada, caso o ângulo de ataque não seja nulo. A faixa de ângulos de ataque atingidos é pequena, assim pode-se considerar que o coeficiente de sustentação tem um comportamento linear. A sustentação é calculada como:

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \rho V^2 A \alpha \quad (4)$$

O momento resultante sobre o foguete é resultado apenas das forças aerodinâmicas, e é calculado como o produto vetorial da distância entre o centro aerodinâmico e o centro de massa com as forças aerodinâmicas.

Também são consideradas as variações no ângulo do ataque de cada seção do foguete causadas por seu movimento de rotação. O momento causado por essas variações é somado ao obtido previamente. Como esse momento é sempre contrário e proporcional à velocidade angular, cria-se um efeito de amortecimento.

### 2.2.2. Método de Adams-Bashforth

O método de Adams-Bashforth é um método de solução de equações diferenciais de passo múltiplo linear explícito. São usadas informações de vários instantes anteriores para se calcular o próximo. É feita uma combinação linear da derivada da função em instantes já conhecidos para se calcular o valor da função no próximo intervalo. Esse método foi escolhido devido a sua facilidade de implementação e eficiência, uma vez que na planilha estão armazenados todas as informações de instantes anteriores.

Ao contrário dos métodos de Runge-Kutta não é necessário o cálculo de intervalos intermediários que são, depois, descartados, elevando o custo computacional.

O custo computacional desse método é muito semelhante ao método de Euler, de primeira ordem, mas sua precisão é muito superior.

O método de Adams-Bashforth de ordem  $k$  pode ser descrito da forma (Butcher, 2003):

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^k \beta_i y'_{n-1-i} \quad (5)$$

Sendo  $y$  o valor tomado pela função e  $h$  o tamanho do intervalo de discretização usado.  $\beta$  assume um valor de acordo com a tabela a seguir:

**Tabela 1. Valores dos coeficientes da combinação linear no método de Adams-Bashforth até 5ª ordem**

k	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
1	1	-	-	-	-
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-	-	-
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	-	-
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{3}{8}$	-
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{1387}{360}$	$\frac{109}{30}$	$-\frac{637}{360}$	$\frac{251}{720}$

Para esse modelo foi usado um método de terceira ordem, calculado do modo:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}) \quad (6)$$

Esse método só pode ser usado a partir da terceira iteração, pois na primeira não existem valores para  $y'_{n-1}$  e  $y'_{n-2}$  e na segunda, não há um valor para  $y'_{n-2}$ . Por esse motivo, na primeira iteração é usado o método de Euler, de primeira ordem, e na segunda é usado o método de Adams-Bashforth de segunda ordem. Calculados das respectivas maneiras:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad (7)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1}) \quad (8)$$

### 2.2.3. Equações Diferenciais a Serem Resolvidas

O objetivo do programa é obter a trajetória a ser seguida pelo foguete. Dividindo-se as forças lineares atuantes pela massa e os momentos pelo momento de inércia, consegue-se a aceleração. Integrando-se a aceleração, obtém-se a velocidade, e integrando-se a velocidade, obtém-se a sua posição ao longo do tempo.

Essas integrações são feitas ao longo do tempo nos três graus de liberdade.

As posições  $x$  e  $z$  são, então, plotadas em uma curva paramétrica ao longo do tempo, que representa a trajetória prevista.

### 2.3. Cálculo da Inclinação da Rampa Contra o Efeito do Vento

Um foguete estável tende a se inclinar no sentido contrário ao do vento nos instantes iniciais do lançamento e, devido a seu empuxo, ele irá se desviar de sua rota original e rumar contra o vento. Uma forma de equilibrar esse efeito é posicionar a rampa de lançamento de maneira ligeiramente inclinada a favor do vento.

Para se calcular a inclinação ideal, que faz com que o foguete siga sua rota original, é usado um método iterativo que testa diferentes valores até encontrar o melhor, ou seja, a inclinação com a qual o desvio no final da rota seja nulo. Foi escolhido um método de Newton-Raphson modificado e criado um *script* em *Visual Basic for Applications*. No método original, para se encontrar o valor de  $x$  para o qual  $f(x)=0$  é usada a seguinte iteração (Burden, 2004):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (9)$$

Neste caso,  $x$  é a inclinação dada e  $f(x)$  é determinado como o desvio do foguete ao final de sua subida. E uma aproximação de  $f'(x)$  é calculada da forma:

$$f'(x_i) := \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (10)$$

São dados dois chutes iniciais e a iteração é repetida até que o desvio esteja dentro de uma margem de erro pré-estabelecida.

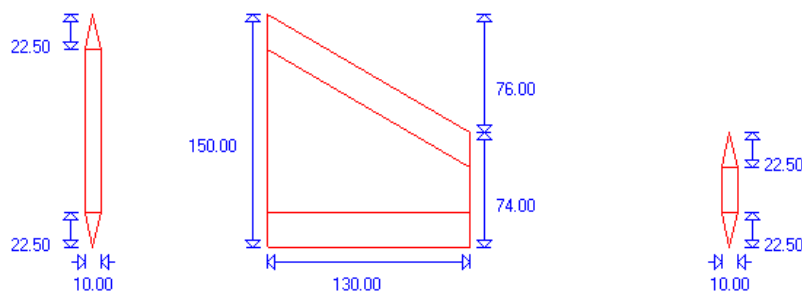
O processo é repetido para várias intensidades de vento por um segundo *script* e é criada uma tabela de inclinações que pode ser facilmente usada na ocasião do lançamento.

## 3. RESULTADOS

O foguete simulado tem uma massa, quando vazio, de 8,05Kg, e um momento de inércia de 0,966Kg.m<sup>2</sup>. Carrega 800g de propelente que geram 741N de empuxo durante 1,15s. Quando vazio, seu centro de massa está localizado a 63cm do topo e sua câmara de combustão está entre 60cm e 100cm do topo.

Sua fuselagem tem 11cm de diâmetro. Seu nariz é cônico, com 15cm de comprimento. O comprimento total do foguete é 1,3m. Seu centro de massa, quando vazio, se localiza a 63cm do topo.

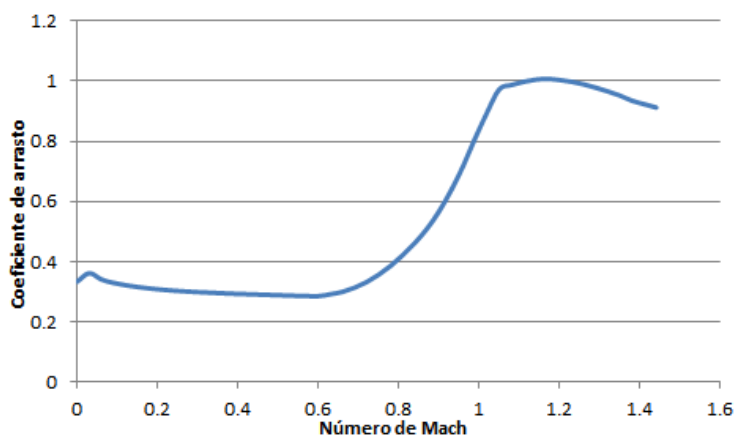
Suas quatro aletas, localizadas no fim da fuselagem, possuem as dimensões mostradas na figura a seguir:



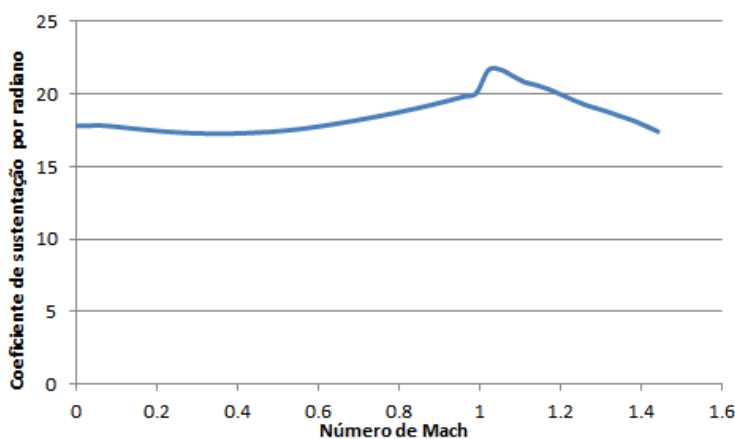
**Figura 1. Dimensões das aletas**

### 3.1. Coeficientes Aerodinâmicos

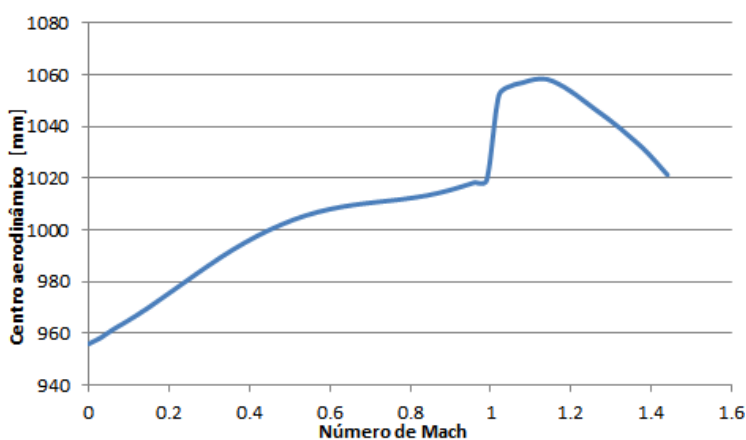
Por meio do software *Aerolab* foram obtidos os coeficientes aerodinâmicos necessários e o centro aerodinâmico do foguete em função do número de Mach, que são mostrados nas figuras a seguir:



**Figura 2. Coeficiente de arrasto**



**Figura 3. Coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque em radianos**



**Figura 4. Posição do centro aerodinâmico**

A área tomada como referência para os coeficientes é a seção transversal do foguete, de 9503mm<sup>2</sup>. Por se tratar de um veículo subsônico, a brusca variação dos coeficientes em velocidades transônicas não representa um problema nesse caso.

### 3.2. Trajetória Calculada

A simulação foi realizada com um intervalo de discretização de 0,01s. Esse intervalo foi julgado adequado pois ao reduzi-lo, não ocorrem diferenças significativas nos resultados.

Considerando a base de lançamento a 600m do nível do mar, sem a ação de ventos, a altitude máxima alcançada seria 419m acima da base, 9,7s após a ignição.

Considerando-se um vento de 3m/s, a altitude se reduz a 418m e a rampa de 1,5m deve ser inclinada 3,8° no sentido do vento. A trajetória seguida é mostrada na figura abaixo:

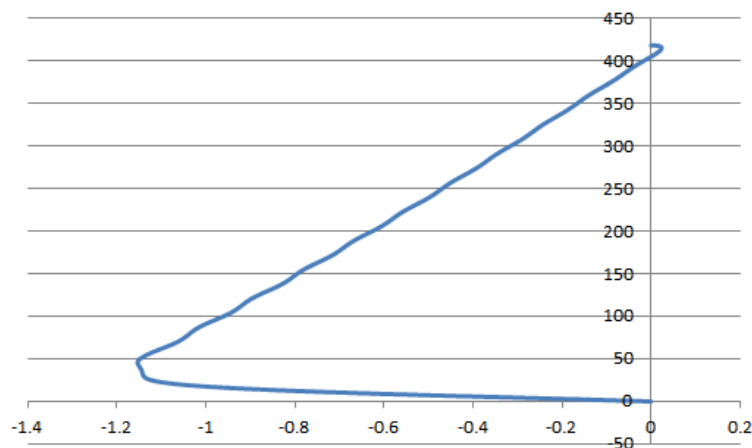


Figura 5. Trajetória de subida com vento de 3m/s para a esquerda. Dimensões em metros, fora de escala

A aceleração máxima atingida é de 80m/s<sup>2</sup>. A carga levada por esse foguete é um paraquedas para seu retorno em segurança à terra e um dispositivo eletrônico para sua abertura. Ambos suportam a aceleração do lançamento.

Também é possível obter gráficos de altura, velocidade e aceleração em função do tempo.

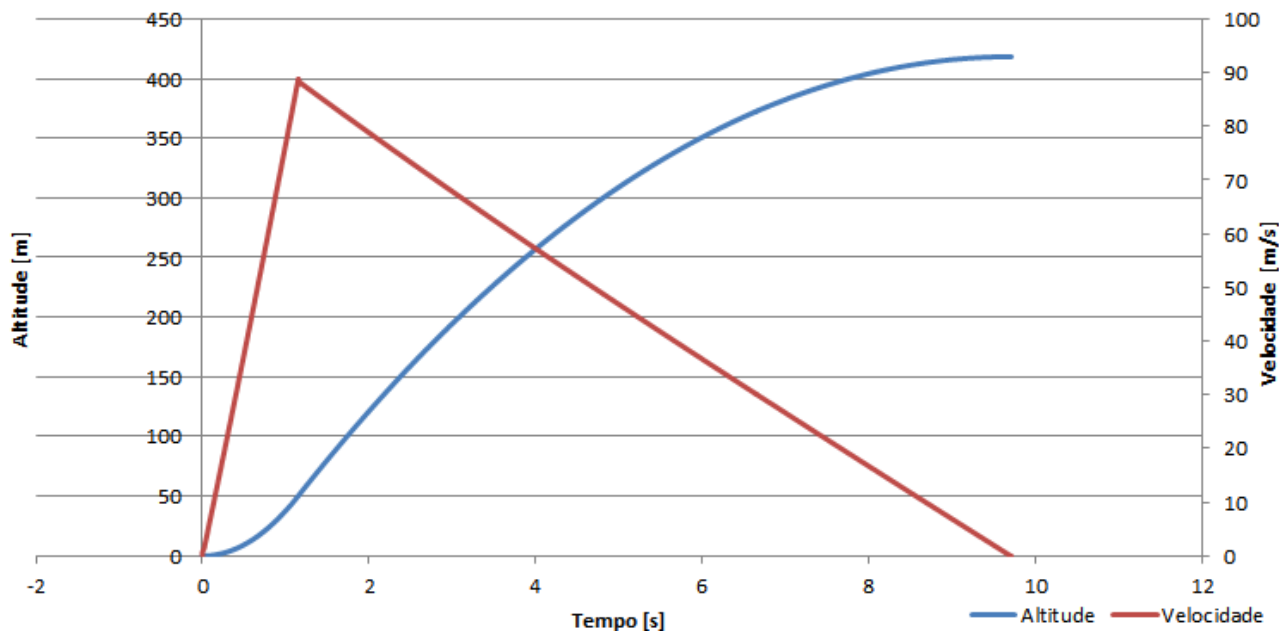


Figura 6. Altura e velocidade em função do tempo

### 3.3. Margem Estática

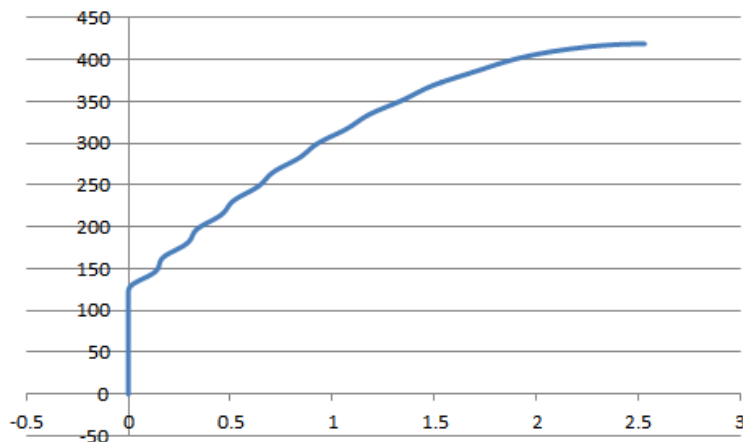
Durante a simulação a margem estática passou de 29cm na ignição para 35cm quando a velocidade era máxima e se reduziu para 32cm após o fim da queima. O diâmetro de foguete é 11cm, o que deixa a margem estática maior que o recomendado pela regra geral.

Por se tratar de um foguete que queima todo seu combustível rapidamente, além de ser lançado de uma rampa inclinada contra os efeitos do vento, isso não se torna um problema.

### 3.4. Recuperação Após Perturbações

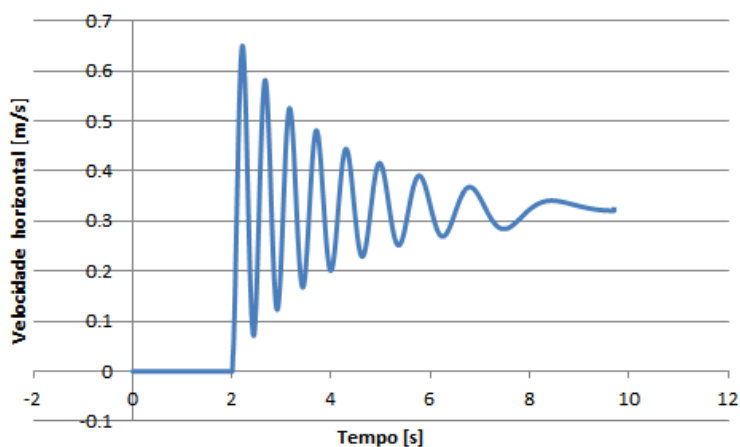
A planilha também possibilita que sejam colocadas perturbações na rota do foguete para que se estude sua capacidade de retornar ao trajeto original. Um meio de se fazer isso é induzir uma pequena velocidade rotacional ao foguete durante sua subida.

Nesse caso foi induzida uma velocidade angular de  $0,2\text{rad/s}$  com  $t = 2\text{s}$  em uma situação sem vento. A figura a seguir mostra a trajetória seguida.



**Figura 7. Trajetória de subida com perturbação. Dimensões em metros, fora de escala**

O desvio da trajetória vertical é de  $2,5\text{m}$ . Foi plotada a componente horizontal da velocidade em função do tempo e observa-se que a amplitude da oscilação se reduz, assim como sua frequência, até que o foguete atinja o ápice de sua rota. O que mostra que o foguete é dinamicamente estável. Isso se deve, em parte, à redução da velocidade após o fim da queima.



**Figura 8. Velocidade horizontal após perturbação**

### 3.5. Equilíbrio do Vento

Foi criado o gráfico de inclinações da rampa em função da intensidade do vento entre zero e  $5\text{m/s}$ . A inclinação necessária cresce de forma praticamente linear com a intensidade do vento, para intensidades consideradas seguras.

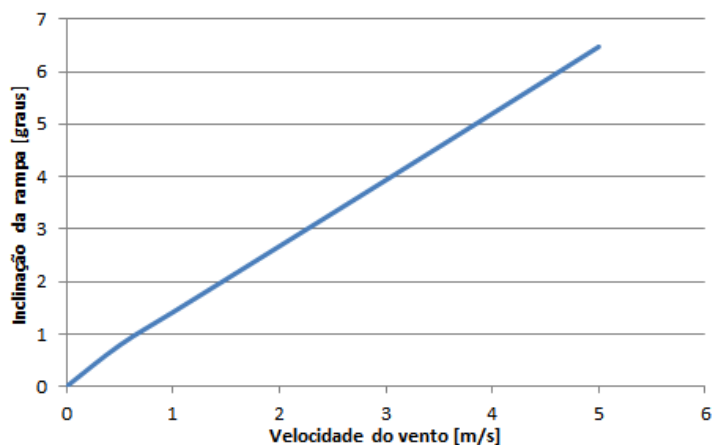


Figura 9. Inclinação necessária da rampa para diferentes intensidades de ventos

### 3.6. Força Sobre as Aletas

Considerando-se um vento de 5m/s a força máxima a agir sobre cada aleta é de 18,9N. Devido ao formato fino característico das aletas, forças laterais se tornam mais críticas, nessa direção a máxima força a agir é de 17,0N. Com esses dados é possível dimensionar a fixação que deve ser usada para as aletas.

## 4. CONCLUSÕES

O método de resolução de equações diferenciais utilizado permitiu o desenvolvimento de um programa que simula o lançamento de um foguete com um custo computacional relativamente baixo, o que possibilita seu uso em estágios iniciais do projeto. O foguete testado mostrou-se estável tanto estaticamente quanto dinamicamente.

Também é possível evitar efeitos adversos causados pelo vento na ocasião do lançamento e medir as forças a que certas partes do veículo estarão sujeitas, facilitando seu projeto estrutural.

Futuramente pode ser criado um modelo semelhante para o estudo do efeito de aletas móveis sobre a estabilidade e o controle do foguete. Também pode ser usado um modelo mais preciso para o empuxo gerado pelo motor.

Além disso, também pode-se otimizar as dimensões do foguete com base em simulações de lançamentos com diversas configurações.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer aos membros Grupo Topus de Pesquisas Aeroespaciais da Escola de Engenharia de São Carlos da USP, que possibilitaram e apoiaram a realização deste trabalho.

## 6. REFERÊNCIA

- Butcher, J.C. , 2003, “Numerical Methods For Ordinary Differential Equations”  
Burden, R.L., Faires, J.D. , 2004, “Numerical Analysis”  
Halliday, D., Resnick, R., Krane, K.S. , 1991, “Fundamentos da Física – Volume 1 – 4ª Edição”  
NASA, 1976, “U.S. Standard Atmosphere”  
Dansk Amatør Raket Klub <<http://www.dark.dk/>>  
Nakka, R.A. , 2011, “Richard Nakka's Experimental Rocketry Web Site” <<http://www.nakka-rocketry.net/>>

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.



## NUMERICAL SIMULATION OF A ROCKET LAUNCH FOR STABILITY AND PERFORMANCE ANALISYS

Marlon Sproesser Mathias, marlonsmathias@gmail.com  
Marcos Vinícius Fernandes Ribeiro, ribeiro.mvf@gmail.com  
Paulo Celso Greco Júnior, pgreco@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Avenida João Dagnone, 1100 - CEP 13563-120 - São Carlos, SP

**Abstract:** *This paper consists on the development of a method to analyze the stability and the performance of a fixed winglet rocket through its climb. A rocket's stability is critical for its launch, as an unstable vehicle might take any path, and a super stable vehicle loses its capability to return to the original route, obtaining a stable configuration that does not compromise the performance is critical for and aerospace vehicle. Relevant variables were chosen and a time discretization method was used in order to compute them, using previous instants and pre-determined coefficients to calculate the next time step. To reduce the number of steps and, therefore, the computational cost of the simulation, a third order Adams-Bashforth method for solving differential equations was used. The path taken by the rocket and the static margin variation can be observed considering wind incidence and mass center and aerodynamic center variations to assure its stability. It was observed that a statically stable rocket might become dynamically unstable in certain configurations, which shows the importance of a study through all the rocket's climb.*

**Keywords:** *Numerical simulation, rocket, static stability, dynamic stability, Adams-Bashforth*